

NP 完全なペンシルパズルの一覧

List of NP-Complete Pencil Puzzles

八登 崇之*

第 2.0 版 [2006/07/03]

1 はじめに

1.1 この文書の目的

この文書は、パズルの種別の一つである「ペンシルパズル」の計算量 (計算論的複雑さ) についての既存の結果 (ほとんどは NP-完全性) を一覧の形にまとめたものである。

1.2 ペンシルパズルとは何か

ペンシルパズルに関する結果のみを載せることに決めた以上、ある問題がペンシルパズルがどうかを判断しなければならない¹。もちろん、厳密な線引きは不可能だが、概ね次のような要件を考えている:

- 大前提: 一般に「パズル」であると認知されている²。
- 完全情報である (運の要素がない)。
- 問題は紙に描かれた図の形で与えられ、その上に鉛筆 (筆記具) で何かを書き込むことで問題を解くという形式である。あるいは、少なくとも、その形式をとることができる。
- 問題を解くのに、与えられた図の領域以外の大量の領域を必要としない³。(虫食算はこの要件を満たさない。)

1.3 凡例

【名称】そのパズルを指すのに広く用いられている名称の一覧。原則として、日本語と英語のみを対象とし、また公の出版物で用いられている名称に限った。名称が語句の省略形に由来する場合は、例えば「数独 (数字は独身に限る)」のように記した。この場合、「数独」の方が正式名称であることに注意。これに対して、「ナンバープレース」(正式名称) を「ナンプレ」のように略して通称されることがあるが、このような略称は扱わなかった。

【問題】問題の形式的 (数学的) な記述。関数問題の形 (入力とそれに対する出力 = 解) で示した。なお、パズルの本に載っているような「普通の」ルールの記述を行う予定はないので、そちらが知りたい場合は、後掲の参考文献を参照してほしい。(注意: 現時点ではこの項目はほとんど書けていない。)

* 東京大学大学院情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻
e-mail: yato@is.s.u-tokyo.ac.jp

¹ 「ペンシルパズル」は (株) ニコリの登録商標であるが、私はこの語をニコリのパズルに限定せずに用いる。

² それを知っている人は、誰もそれをパズルだと思うということ。知っている人の多少は関係ない。

³ もちろん、原理的には、極めて小さな文字を使えば問題図の中に補助情報を何でも書き込めるので、これは数学的言明にはなっていない。

【歴史】そのパズルの成立までの歴史。ただ、これについては確実な情報が得がたいので、この文書中の記述も必ずしも正確とは限らないことを断っておく。

「オモバ」は雑誌「ニコリ」のコーナーの「オモロパズルのできるまで」の略称である。このコーナーでは読者が考案した新しいパズルの投稿を受け付けている。なお、このコーナーでは創作者の名前は読者には筆名の形でのみ知らされるので、本文書中で掲載されているのも基本的に筆名である。

【NP-完全性】パズルの解の存在判定問題の NP-完全性が示された文献と、還元元となった NP-完全問題の情報を示す。

【ASP-完全性】パズルの解を求める問題の ASP-完全性に関する情報を示す。(ASP-完全性については 1.4 節を参照。)

【備考】その他の情報。

パズルの歴史については、以下の文献や Web サイトを参考にした。

[20] ニコリの Web サイト「web ニコリ」。

[21] 西尾徹也 編, 「パズラー人気定番パズル 1」, 世界文化社, 2001.

[22] 岡田光雄, 「パズルで遊ぼう」, 講談社, 1983.

[23] 「オモロパズル大全集」, ニコリ, 2004.

[34] 高木茂男, 「パズル遊びへの招待・オンライン版」, 2001.

[38] ウィキペディア (Wikipedia) 英語版。

[39] ウィキペディア (Wikipedia) 日本語版。

パズルのルールに関しては、上記の文献のほかに以下のサイトが参考になる:

[28] 斎藤貴彦さんの Web サイト「Logic Puzzle」。

[29] 酒井美奈子さんの Web サイト「ant's PUZ-T」。

1.4 ASP-完全性について

ASP-完全性は別解を求める問題 (別解問題; Another Solution Problem) の計算量を解析する際に有用な概念である。以下でその概略を説明する。正確な定義については, [42, 41] を参照してほしい。

関数問題 f, g について, 「 f の判定版」から「 g の判定版」への多項式時間還元 φ_D (すなわち x が f で解をもつ $\iff \varphi_S(x)$ が g で解をもつ) があり, かつ x の解集合から $\varphi_D(x)$ の解集合への多項式時間計算可能な全単射 φ_S が存在する時, f から g へ多項式時間 ASP 還元可能という。(問題クラスとしての ASP および ASP 還元は [35] で提唱された。) 以下では多項式時間の還元のみを考えるので, 「多項式時間」の語を省く。

クラス FNP (多項式均衡でかつ多項式時間検証可能な関数問題のクラス) の中での ASP 還元に関する完全性のことを ASP-完全と呼ぶ (正確には ASP-FNP-完全)。

ある関数問題 f が ASP-完全の時, 以下の性質が成り立つ:

- (1) f の事例 (instance; パズルの「個々の問題図」) とそれに対する k 個の解が与えられた時に, k 個のほかに解があるかを判定する問題は, 全ての $k \geq 0$ について NP-完全である。

また ASP 還元は parsimonious 還元の特例になっている (ASP 還元定義の中の, φ_S の計算可能性を除いたのが parsimonious 還元定義) ので, 以下のような #P-完全問題に関する性質が ASP-完全問題 f についても成り立つ:

- (2) f の事例が与えられた時、その解の個数を答える問題は #P-完全 [36].
- (3) f の事例で解が高々 1 個しかないことが判っているものについて、解の存在を判定するのは、多項式時間確率的還元に関して NP-完全 [37].
- (4) f の事例が与えられた時、解の個数が丁度 1 個であるかを判定するのは、多項式時間確率的還元に関して DP-完全.

多くのペンシルパズルでは、問題を作る時に解の一意性が要求される。従って、パズルの別解問題の計算量の解析は実用的に大きな意味を持つ。ほとんどの場合、パズルの問題を作った場合には、その解の 1 つ (作為解) も持っている状態になる。従って、その状態で、作為解以外の解があるかを判定する問題は (1) の $k = 1$ の場合に相当する。また、予め解の唯一性が保証された問題を解くのは、(3) 以上に難しい問題となる。

ある関数問題 f の ASP-完全性を示すためには、ある ASP-完全問題からの ASP 還元を示せばよい (NP-完全の時と同様)。文献 [42, 41] では、最も基本的な NP-完全問題である 3SAT と 1-in-3 SAT について、その関数版が ASP-完全であることが示されている。また、既存の parsimonious 還元はそのほとんど全てが ASP 還元であることが期待できる。なぜなら、parsimonious 還元を構成する最も自然な方法は、解の間の具体的な対応を示すことだからである。従って、数え上げが #P-完全な関数問題の多くが ASP-完全になることが期待できる。

専門家でない人のために 計算量理論をきちんと学習したことはないが、NP-完全性については漠然と分かっているという人のために、「あるパズルが ASP-完全である」と何がいえるかを簡単にまとめておく。

- 解が幾つあるか判らない問題に対して、解があるかを判定するのは NP-完全である。→ そのような問題に対して、解を 1 つ求める (または「解なし」と答える) のは NP-完全と同様に難しい。
- 唯一解をもつことが判っている問題に対して、その解を求めるのは、やはり NP-完全と同様に難しい。
- パズル製作者が、自作の問題とその解の 1 つを持っているとする。このとき、別解があるかを判定するのは NP-完全。
- 与えられた問題が唯一解 (複数解や解なしでなく) であるかを判定するのは NP-完全より少し難しい。
- 与えられた問題が解を幾つ持つかを求めるのは NP-完全よりずっと難しい。

(計算量理論での妥当な仮定—— $P \neq NP$ の類——の下での話.)

1.5 数学的記法

数学的記述の中で用いられる記号を定義する。

- \mathbf{N}_+ : 正整数の集合 ($:= \{1, 2, 3, \dots\}$).
- \mathbf{N} : 非負整数の集合 ($:= \{0\} \cup \mathbf{N}_+$).
- X^m : X の元からなる長さ m の列の集合. 列は $a := \langle a_1, \dots, a_m \rangle = \langle a_j \rangle_{j=1}^m$ と記す.
- X^* : X の元からなる任意長の列の集合 ($:= \bigcup_{k=0}^{\infty} X^k$).
- $X^{m \times n}$: X の元からなる $m \times n$ の行列の集合. 行列は $M := (M_{i,j})_{i,j}$ と記す.
- $r_j(M)$: 行列 M の第 j 行を列とみなしたもの. ($r_j(M) = \langle M_{j,i} \rangle_i$)
- $c_j(M)$: 行列 M の第 j 列を列とみなしたもの. ($c_j(M) = \langle M_{i,j} \rangle_i$)
- $V(G)$: グラフ G の頂点集合.
- $E(G)$: グラフ G の辺集合.
- (パスが) 初等的 : 同じ頂点を 2 度通らないこと. 「単純」は「同じ辺を 2 度通らない」の意味に使う.

2 リスト

ペンシルパズルの分類は、「解く人が何をするか」を基準に行った:

塗りわけ系 グリッド上に隠された (複数の) 物体 (多くの場合黒マス) の位置を特定する.

数字文字書き込み系 グリッドの空きマスに数字や文字を書き入れる.

線引き系 条件に従い線を引く, または輪を作る. ただし次項に該当しないもの.

ブロック分割系 グリッドを複数の領域に分割する.

準ペンシルパズル 1.2 節で述べた条件を完全には満たさないが, 一般にペンシルパズルとして扱われることが多いパズル.

なお, 現時点では, 項目番号は固定しない方針である.

2.1 塗りわけ系パズル

#1 お絵描きロジック

【名称】お絵描きロジック; ののぐらむ; イラストロジック; Paint by Numbers; Nonogram; Griddler; 他に各国語で「日本のパズル」「日本のクロスワード」と呼ばれることもある.

【歴史】西尾徹也と「いしだのん」(石田伸子) により同時期に独立に考案される (1988 年).

【問題】入力: 整数 $M, N \in \mathbf{N}_+$; 行制約 $\langle h_i \rangle_{i=1}^M$ ($h_i \in \mathbf{N}_+^*$); 列制約 $\langle v_j \rangle_{j=1}^N$ ($v_j \in \mathbf{N}_+^*$).

出力: 行列 $A \in \{0, 1\}^{M \times N}$ で, $g(r_i(A)) = h_i$ ($\forall i \in [1..M]$), $g(c_j(A)) = v_j$ ($\forall j \in [1..N]$) を満たすもの. ただし $g(a)$ は a に出現する 1 の連の長さを順番に並べた列. 例えば $g(\langle 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1 \rangle) = \langle 3, 1 \rangle$.

【NP-完全性】3次元マッチングからの還元 (上田, 永尾 1996 [35]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元である (ASP 還元を最初に提唱したのが [35] である). 3SAT から 3次元マッチングへの有名な還元 ([25] 参照) は容易に ASP 還元で修正できるので, この問題は ASP 完全である.

#2 ぬりかべ

【名称】ぬりかべ; Nurikabe.

【歴史】ニコリ 33 号「オモパ」で紹介 (1991 年). 考案者は「れーにん」.

【NP-完全性】回路 SAT からの還元 (McPhail 2003 [19]).

【備考】同時期に独立にぬりかべの NP-完全性を示した論文 (Holzer, Klein, Kutrib 2004 [11]) があるが, こちらは未調査. これによると, 「 2×2 カタマリ禁」のルールがなくても NP-完全になるらしい.

#3 美術館

【名称】美術館; Light Up.

【歴史】ニコリ 95 号「オモパ」で紹介 (2001 年). 考案者は「あさおきたん」.

【NP-完全性】回路 SAT からの還元 (McPhail 2005 [18]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元なので (私が確認), この問題は ASP-完全である.

#4 バトルシップ

【名称】バトルシップ; Battleships.

【歴史】同名の不完全情報 2 人ゲームを脚色してペンシルパズルにしたもの。1990 年代前半のアルゼンチンで考案され、1992 年の世界パズル選手権で出題される。

【NP-完全性】3SAT からの還元 (Sevenster 2004 [31])。)

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元なので、この問題は ASP-完全である。バトルシップの NP-完全性については、これ以前に Kaye により言及されている。これを踏まえた上で、この論文 [31] は parsimonious 還元ができることを主結果としている。

#5 ボンバーパズル

【名称】ボンバーパズル; Minesweeper Puzzle.

【歴史】コンピュータ用の不完全情報 1 人ゲームである「マインスイーパ (Minesweeper)」(Robert Donner 考案) を元にして作られたペンシルパズル。1993 年の世界パズル選手権で出題された。

【NP-完全性】この問題は Kaye [14] (2000 年) が考察の対象としている「マインスイーパー貫性問題 (Minesweeper Consistency Problem)」と非常によく似ているが、以下の点が異なる:

マインスイーパー貫性問題では入力に「既知の爆弾の場所」を指定できるが、ボンバーパズルではそれができない。(ボンバーパズルはマインスイーパー貫性問題の部分問題である。)

論文 [14] ではマインスイーパー貫性問題の NP-完全性が示されているが、これだけではボンバーパズルの NP-完全性は証明されない。しかし、還元に使われる部品が以下の性質を満たしているなら、その還元はボンバーパズルの NP-完全性も示していることになる:

その部品に含まれる全ての「既知の爆弾」のマスを「不明」に変更する。この時、この部品が局所解をもつためには、結局変更したマスは爆弾を含んでいなければならないことが導出できる。

この性質を「爆弾導出可能性」と呼ぶことにする。例えば、文献 [15] (Kaye による解説記事) の中の図 9 の AND ゲートは爆弾導出可能性をもつが、図 10 の OR ゲートはもたない。回路 SAT からの還元を構成するためには、図 3-7, 9 の部品を用いれば十分で、これらの部品は全て爆弾導出可能性を満たす。従って、ボンバーパズルの NP-完全性が証明できた。

【備考】ボンバーパズルの ASP-完全性を示すには、回路 SAT からマインスイーパー貫性問題への爆弾同種可能性をもつ ASP 還元があればよい。マインスイーパー貫性問題への ASP 還元 (parsimonious 還元) を示した論文は多数あり (McPhail [19]; de Bondt [5]; Pederson [26])、その中で Kaye の AND ゲート ([15] の図 9) は局所解が一意でないことが指摘されている。おそらくこれらの論文の中に局所解一意性と爆弾導出可能性の両方を満たす部品が見つかると思っているが、まだ調査していない。

ボンバーパズルには予め爆弾の総数が示されている変種がある。総数情報なしの版から総数情報ありの版への還元 (ただし ASP 還元ではない) は簡単に作れるので、総数情報ありのボンバーパズルも NP-完全である。

マインスイーパー貫性問題に関するその他の結果:

- 1 次元の (幅が 1 の) マインスイーパー貫性問題は正則言語となる (従って線形時間で解ける) (Kedlac [13]; Pedersen [26])。3 次元以上のマインスイーパー貫性問題は NP-完全 (Pedersen [26])。 (これらの結果はボンバーパズルについても成立する。)
- 六角格子および三角格子上でのマインスイーパー貫性問題は NP-完全 (de Bondt [5])。

2.2 数字文字書き込み系パズル

#6 カックロ

【名称】カックロ (加算クロス); サムクロス; クロスサム; Cross Sum; Kakuro (Kakkuro, Kakro).

【歴史】このパズルの原型といえるものは Henry Dudeney により 1925 年に発表されている. 現在の形のも
のは Dell Magazines の雑誌において 1950 年代から発表されている.

【問題】入力: グリッドグラフ $\text{Grd}(M, N)$ の連結な誘導部分グラフ G および写像 t . G の中の, 縦または
横に一直線に 2 点以上連続する極大な点集合を G の「連」と呼び, G の連の集合を $S(G)$ と記す. t は
 $S(G) \rightarrow \mathbb{N}_+$ の写像である.

出力: 次を満たす写像 $w : V(G) \rightarrow [1..9]$: 全ての連 $\sigma \in S(G)$ について; (i) $\sum_{v \in \sigma} w(v) = t(\sigma)$;
(ii) $v, v' \in \sigma \wedge v \neq v' \implies w(v) \neq w(v')$.

【NP-完全性】次の問題からの還元 (瀬田 2002 [30, 42, 41]).

制限付閉路分割問題 入力: 平面的な混合グラフ (有向辺と無向辺の両方をもつグラフ) G で全ての頂
点の次数が 3 以下であるもの.

出力: (有向) 閉路の集合で, G の各頂点を丁度 1 回ずつ含むもの.

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元で, かつ瀬田 [30, 42] が 1-in-3 SAT から制限付閉路分割問題への
ASP 還元を示しているため, この問題は ASP 完全.

【備考】問題を作るときの規則として, 「横または縦方向の幅が 1 になるマス」の扱いについて幾つかの変種
が考えられる:

- (a) そのようなマスの存在を禁止する. (これが現在の慣習.)
- (b) そのようなマスの存在を認めるが, それを連とみなさない (つまり和が与えられない). (上述の形式
定義.)
- (c) そのようなマスを 1 マスの連とみなし, 和 (つまりマスに入る数) を指定する.

(b) および (c) は (a) を部分問題として含む. [30, 42, 41] の還元により構成される問題は (a) の条件
を満たしているため, 結果的に (a), (b), (c) の問題は全て ASP-完全である.

カックロの拡張として, w の値 (マスに入る数) の最大値を N , また連の長さを $[S..L]$ の範囲に制限
した問題のことを (N, S, L) -カックロと呼ぶことにする. ($1 \leq S \leq L \leq N$ として一般性を失わない.
 $S = 1$ の場合は (c), $S \geq 2$ の場合は (a) を適用する.) $[S'..L'] \subseteq [S..L]$ ならば (N, S, L) -カックロは
 (N, S', L') -カックロを部分問題として含む. しかし, $N' < N$ の時に, (N', S, L) -カックロは (N, S, L) -
カックロの部分問題とならないことに注意.

[30] では以下の結果が示されている:

- $N \geq 7$ について, $(N, 2, 5)$ -カックロは NP-完全. (ASP-完全でもある.)
- $N \geq 7$ について, $(N, 1, 3)$ -カックロは NP-完全. (ASP-完全でもある.)
- (N, K, K) -カックロは線形時間で解ける. (問題が有限個しかない.)
- $(N, 1, 2)$ -カックロは線形時間で解ける.
- 幅 (または高さ) が定数で抑えられているカックロは P に属する.

#7 ナンバープレース

【名称】ナンバープレース; 数独 (数字は独身に限る); Sudoku; Number Place.

【歴史】現在の形のもものは 1979 年に Howard Garns により考案された. それ以前から, 部分ラテン方陣完成
問題 (後述) が娯楽パズルとして出題されていたことを考えると, その問題から派生した可能性が高いと
考えられる. (ラテン方陣は 18 世紀後半から考えられている数学的対象.)

【問題】一般の $N^2 \times N^2$ のサイズのナンバープレースを考える.

【NP-完全性】部分ラテン方陣完成問題からの還元 (八登 2003 [40, 42, 41]). 部分ラテン方陣完成問題とは、ナンバープレースの「小正方形制約」を除いたもので、Colbourn [3] により NP-完全性が示されている。

【ASP-完全性】上述の部分ラテン方陣完成問題からナンバープレースへの還元は ASP 還元である。また、Colbourn, Colbourn, Stinson [4] により 1-in-4 SAT から部分ラテン方陣完成問題への ASP 還元が示されている。従って、この問題は ASP-完全である。

【備考】このパズルには、「第 3 の領域分割」の方法を変更した様々な変種があるが、本来のナンバープレースを部分問題として含まないような「特定の変種」を抽出するのは難しいように思える。部分ラテン方陣完成問題 (これ自体もペンシルパズルとして出題されることがある) からの別の派生として、各対角線に関しても異なる数字を入れることを要請するものがある (「マジックスクエア」と呼ばれている)。また複数のグリッドの一部が重なった形で出題されることもある (「重ね合わせナンプレ」等と呼ばれる)。この方法だと 1 つのグリッドのサイズを固定 (9×9) にしたまま任意の大きさの問題を作ることができて、また実際に 50 個以上重ねたものが発表されている。この方法で入力サイズを可変にした場合の計算量は知られていない。

計算量とは関係がないが、ナンバープレースに関する興味深い問題として次のようなものがある:

- 唯一解をもつ問題図のヒントの数字の最小値 M は幾らか? 標準サイズの 9×9 の場合, $M \leq 17$ であることが知られているが, M の下限についての結果はないようである。ちなみに, ラテン方陣完成問題に関して同様の問題が考察されていて, $n \times n$ の方陣に対して $M = \lfloor n^2/4 \rfloor$ と予想されている (Bate, van Rees [2]).
- ナンバープレースの解答として可能な図はいくつあるか? 標準サイズの 9×9 に対する答えは 2005 年に Feigenhauer, Jarvis により求められ, その値は 6670903752021072936960 (6.67×10^{21}) である (OEIS [24] にも掲載; 番号 A107739).. 長方形のブロックを用いた 12×12 等, 他のサイズについての結果もある (Wikipedia 英語版 [38], “Mathematics of Sudoku” 項)。ラテン方陣については, $n = 11$ までの $n \times n$ について答えが知られている (OEIS [24], 番号 A002860)。

#8 スケルトン

【名称】スケルトン; Crisscross; Skeleton.

【歴史】1970 年代のアメリカにおいて盛んに制作されるようになった。

【NP-完全性】Gower, Wilkerson [1] (1996 年) の結果を修正すれば, 3 次元マッチングからの還元が得られるので, この問題は NP-完全である。

【備考】上述の論文 [1] は Crozzle というゲームの NP-困難性を示している。このゲームは, 与えられた単語リストを用いて決められたサイズ以下のスケルトンを各競技者が作り, 一定の採点方式の下で得点を競うものであり (ニコリの「スケコン」と同様だが採点方式が異なる), 最適化問題として定式化される。

2.3 線引き系パズル

#9 スリザーリンク

【名称】スリザーリンク; ループコースパズル; Slither Link; Fence.

【歴史】ニコリ 26 号「オモパ」で紹介された 2 つのパズル (それぞれ「矢田レーニン」と「轟由紀」の創案) を元にして, ニコリ編集部が改作してできた (1989 年)。

【問題】入力: グリッドグラフ $G = \text{Grd}(M, N)$ と写像 $d: F(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \perp\}$.

出力: G の部分グラフである初等な閉路 C で, 次を満たすもの: 全ての $d(f) \neq \perp$ なる $\text{fin}F(G)$ について, f を囲う 4 辺のうち C に含まれる辺の数が $d(f)$ に等しい.

【NP-完全性】「平面的かつ全ての頂点の次数が 3 以下」の条件が付いたハミルトン閉路問題からの還元 (八登 2003 [40, 42, 41]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元である. しかも, 3SAT から上記の制限付きのハミルトン閉路問題への ASP 還元が瀬田 [30, 42] により示されている. よって, この問題は ASP-完全である.

【備考】スリザーリンクは 1 つの輪を作るパズルだが, ここで, 輪を 2 つ以上作ってもよい (ただし輪同士が交わってはいけない) ことにする. この変種も NP-完全である (杉村 2005 [33]).

10 ナンバーリンク

【名称】ナンバーリンク; アルコネ (アルファベットコネクション).

【歴史】「グラフの平面描画を求める」型の古典的パズルの発展形であるが, この形のものがいつから現れたかは不明.

【NP-完全性】この問題は, 回路設計の分野で古くから考察されてきた「グリッドグラフ上での点素パス問題 (Vertex-Disjoint Paths on Grid Graphs)」と本質的に同一である. これについては, Kramer, van Leeuwen [16] (1982 年) および Richards [27] (1984 年) により NP-完全性が示されている. とともに平面 3SAT からの還元を用いている.

【備考】このパズルの問題を作成する際には, 次のような慣習がある.

解 (一意でなければならない) の図において, どの頂点もどれかのパスが通る.

そこで, 解の条件に「どの頂点もパスが通る」を追加した変種を考え, これを「全点通過版」と呼ぶ. この変種だと, 点対の個数が少なくても問題は自明ではない. (ただし, 実際に点対が少ない問題を一意解にするためには, 何らかの「自明な迂回を禁止する」ルールが必要なようである.) 点対が 1 組の場合は多項式時間アルゴリズムが知られている [12]. 点対が 2 組の場合の多項式時間計算可能性に関する部分的な結果が [17] にある.

11 ましゅ

【名称】ましゅ (白真珠黒真珠); Masyu, Pearl Puzzle.

【歴史】ニコリ 90 号「オモパ」で紹介 (2000 年). 「矢野龍王」創案のパズルに「アセトニトリル」が改良を加えたもの.

【NP-完全性】平面 3-正規グラフのハミルトン閉路問題からの還元 (Friedman 2002 [9]).

【備考】上述の還元では, 白丸しか使っていない. 「矢野龍王」が考えた元々の形は白丸のみを使うパズル (「真珠の首飾り」と呼ばれた) だったので, [9] の結果はこのパズルの NP-完全性も示している.

12 バッグ

【名称】バッグ (BAG); Corral Puzzle

【歴史】ニコリ 60 号「オモパ」で紹介 (1996 年). 考案者は「ゲサクですよ」.

【NP-完全性】平面的グラフの 3-彩色問題からの還元 (Friedman 2002 [8]).

2.4 ブロック分割系パズル

13 天体ショー

【名称】天体ショー; Spiral Galaxies.

【歴史】ニコリ 96 号「オモパ」で紹介 (2001 年). 考案者は「ゲサク」.

【NP-完全性】回路 SAT からの還元 (Friedman 2002 [10]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元なので (私が確認), この問題は ASP-完全である.

14 フィルオミノ

【名称】フィルオミノ; Fillomino (Filomino).

【歴史】ニコリ 47 号「オモパ」で紹介 (1994 年). 考案者は「すらんた」.

【NP-完全性】平面 3SAT からの還元 (八登 2003 [40]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元なので, この問題は ASP-完全である.

2.5 準ペンシルパズル

15 覆面算

【名称】覆面算; Cryptarithm; Crypt-arithmetic; Verbal Arithmetic; Alphametic.

【歴史】虫食算と併行する形で欧米で 20 世紀初頭から盛んに作られるようになった. 有名な “SEND + MORE = MONEY” (Dudeney の作とされる) が発表されたのは 1924 年. 日本に入ったのもほぼ同時期.

【問題】基数を一般の正整数とした場合の, 加算の覆面算. (10 進数の覆面算は線形時間で解ける.)

【NP-完全性】3SAT からの還元 (Eppstein 1987 [7]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元ではない (らしい). しかし, de Bondt [6] が 1-in-3 SAT からの ASP 還元を示しているため, この問題は ASP-完全である.

【備考】[6] の還元では, 2 数の加算の形の覆面算を構成しているが, これを 2 数の乗算または 2 数の除算 (両方について, 筆算形とそうでないものの両方) に修正することは容易である (従って, これらの問題も ASP-完全).

欧米では, 覆面算と虫食算を区別せずに同じ言葉で呼ぶことが多い. この事情もあってか, 純粋な虫食算についての結果は存在しないようである. (覆面算との混合問題は, 明らかに覆面算を部分問題として含む.)

16 マスターマインド

【名称】マスターマインド; Mastermind.

【歴史】同名の不完全情報 2 人ゲーム (Mordecai Meierowitz 考案) を元にして作られた論理パズル.

【問題】「暗号語 (codeword)」が c 種類 (定数) の文字からなる長さ N のものである場合を考える.

【NP-完全性】1-in-3 SAT からの還元 (de Bondt 2004 [5]).

【ASP-完全性】上述の還元は ASP 還元なので, この問題は ASP-完全である.

【備考】上述の [5] の結果は任意の $c \geq 2$ について成立する.

これとは独立に, Stuckman, Zhang (2005 年 [32]) は頂点被覆問題からの還元でマスターマインドの NP-完全性を示している (ただし, c も可変にする必要がある).

このパズルでは, 暗号語も問題に与えられるその推測も同じ文字が 2 回以上現れないという制約が付けられることがある. この場合の計算量は不明.

参考文献

- [1] M. G. and Ralph Wilkerson. R-by-C Crozzle: an NP-hard problem. In *Proceedings of the 1996 ACM Symposium on Applied Computing*, pp. 73–76, Philadelphia, Pennsylvania, United States, 1996.
- [2] J. A. Bate and G. H. J. van Rees. The size of the smallest strong critical set in a Latin square. *Ars Combinatorica*, 53:73–83, 1999.
URL: <http://www.cs.umanitoba.ca/~vanrees/ArsCritSet.pdf>
- [3] C. J. Colbourn. The complexity of completing partial Latin squares. *Discrete Appl. Math.*, 8:25–30, 1984.
- [4] C. J. Colbourn, M. J. Colbourn, and D. R. Stinson. The computational complexity of recognizing critical sets. In *Proceedings of the First Southeast Asian Conference on Graph Theory, Singapore, May 1983*, No. 1073 in Lecture Notes in Math., pp. 248–253. Springer, 1984.
- [5] M. de Bondt. NP-completeness of Master Mind and Minesweeper. Technical Report 0418, Department of Mathematics, Radboud University Nijmegen, Nov. 2004.
URL: http://www.math.ru.nl/onderzoek/reports/rep2004/rep04_18.ps.gz
- [6] M. de Bondt. On the ASP-completeness of Cryptarithms. Technical Report 0419, Department of Mathematics, Radboud University Nijmegen, Nov. 2004.
URL: http://www.math.ru.nl/onderzoek/reports/rep2004/rep04_19.ps.gz
- [7] D. Eppstein. On the NP-completeness of cryptarithms. *SIGACT News*, 18(3):38–40, 1987.
URL: <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/pubs/Epp-SN-87.pdf>
- [8] E. Friedman. Corral puzzles are NP-complete, 2002. manuscript.
URL: <http://www.stetson.edu/~efriedma/papers/corral.pdf>
- [9] E. Friedman. Pearl puzzles are NP-complete, 2002. manuscript.
URL: <http://www.stetson.edu/~efriedma/papers/pearl.pdf>
- [10] E. Friedman. Spiral galaxies puzzles are NP-complete, 2002. manuscript.
URL: <http://www.stetson.edu/~efriedma/papers/spiral.pdf>
- [11] M. Holzer, A. Klein, and M. Kutrib. On the NP-completeness of the Nurikabe-pencil puzzle and variants thereof. In *Proceedings of the Third International Conference on Fun with Algorithms (FUN 2004)*, Isola d’Elba, Tuscany, Italy, May 26–28 2004.
- [12] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Szwarcfiter. Hamilton paths in grid graphs. *SIAM J. Comput.*, 11(4):676–686, 1982.
- [13] M. Kadlac. Explorations of the minesweeper consistency problem. In *2003 REU Proceedings*, Aug. 2003.
URL: http://www.math.oregonstate.edu/~math_reu/REU2004/Proceedings/MK_Final.pdf
- [14] R. Kaye. Minesweeper is NP-complete. *Mathematical Intelligencer*, 22(2):9–15, 2000.
- [15] R. Kaye. Some minesweeper configurations, 2000. manuscript.
URL: <http://web.mat.bham.ac.uk/R.W.Kaye/minesw/minesw.pdf>
- [16] M. R. Kramer and J. van Leeuwen. Wire routing is NP-complete. Report RUU-CS-82-4, Department of Computer Science, University of Utrecht, 1982.
- [17] 牧野. A polynomial time algorithm for 2-link-puzzle, 2005. 2004 年度冬の LA シンポジウム.
- [18] B. McPhail. Light Up is NP-complete, Feb. 2005.

- URL: <http://www.reed.edu/~mcphailb/lightup.pdf>
- [19] B. P. McPhail. The complexity of puzzles: NP-completeness results for Nurikabe and Minesweeper. Senior thesis, Reed College, 2003.
URL: <http://www.reed.edu/~mcphailb/thesis.pdf>
- [20] ニコリ. web ニコリ. WWW content.
URL: <http://www.nikoli.co.jp/>
- [21] 西尾 (編). パズラー人気定番パズル 1. パズル BOOKS 17. 世界文化社, 2001.
- [22] 岡田. パズルで遊ぼう. 講談社現代新書 690. 講談社, 1983.
- [23] オモロパズル大全集. ニコリ, 2004.
- [24] On-line encyclopedia of integer sequences. WWW content.
URL: <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>
- [25] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [26] K. Pedersen. The complexity of Minesweeper and strategies for game playing. Master's thesis, Department of Computer Science, University of Warwick, 2004.
URL: <http://www.dcs.warwick.ac.uk/~kasper/Minesweeper/Files/report.pdf>
- [27] D. Richards. Complexity of single-layer routing. *IEEE Trans. Computers*, 33(3):286–288, 1984.
- [28] 斎藤. Logic puzzle. WWW content.
URL: <http://homepage2.nifty.com/lonelyperzoo/>
- [29] 酒井. ant's PUZ-T. WWW content.
URL: <http://puzt.cool.ne.jp/>
- [30] T. Seta. The complexities of puzzles, CROSS SUM and their another solution problems (ASP). Senior thesis, the University of Tokyo, 2002.
URL: http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~seta/paper/senior_thesis/seniorthesis.pdf
- [31] M. Sevenster. Battleships as decision problem. *ICGA Journal*, 27(3):142–149, 2004.
URL: <http://staff.science.uva.nl/~sevenstr/BattleshipsAsDecidabilityProblem.ps>
- [32] J. Stuckman and G.-Q. Zhang. Mastermind is NP-complete. arXiv e-Print archive, cs.CC/0512049, June 2005.
- [33] 杉村. 線形計画法を用いたスリザーリンクの解法. 卒業論文, 東京大学, Feb. 2005.
- [34] 高木. パズル遊びへの招待・オンライン版, 2001. 原書:「パズル遊びへの招待」, PHP 研究所, 1994.
URL: http://torito.jp/puzzles/puzzle_asobi.html
- [35] N. Ueda and T. Nagao. NP-completeness results for NONOGRAM via parsimonious reductions. Technical Report TR96-0008, Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology, 1996.
URL: <ftp://ftp.cs.titech.ac.jp/pub/TR/96/TR96-0008.ps.gz>
- [36] L. G. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Comput. Sci.*, 8(2):189–201, 1979.
- [37] L. Valiant and V. Vazirani. NP is as easy as detecting unique solutions. *Theoretical Comput. Sci.*, 47:85–93, 1986.
- [38] Wikipedia, the free encyclopedia. WWW content.
URL: <http://en.wikipedia.org/>
- [39] フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』. WWW content.
URL: <http://ja.wikipedia.org/>

- [40] T. Yato. Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles. Master thesis, the University of Tokyo, 2003.
URL: <http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/MasterThesis.pdf>
- [41] T. Yato and T. Seta. Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles. IPSJ SIG Notes 2002-AL-87-2, IPSJ, 2002.
URL: <http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/SIGAL87-2.pdf>
- [42] T. Yato and T. Seta. Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles. *IEICE Trans. Fundamentals*, E86-A(5):1052–1060, 2003.